Πρόταση

Το μέτρο στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_\lambda^*)$ είναι η πλήρωση του $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$

Απόδειξη

Αρκεί νδο $\mathcal{M}_\lambda^* = (\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))_\lambda$

Δηλαδή αρκεί νδο $\forall A \subset \mathbb{R}$: $A \in \mathcal{M}_\lambda^* \Leftrightarrow \exists E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $E \subset A \subset F$ και τ/ω $\lambda(F \setminus E) = 0$

$(\Rightarrow)$: Εστω $A \in \mathcal{M}_\lambda^*$

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) < +\infty$

Τότε από προηγούμενη πρόταση: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists K_n$ συμπαγές U_n ανοιχτό : $K_n \subset A \subset U_n$: $\lambda(U_n) - \lambda(K_n) < \frac{1}{n}$.

Θέτοντας $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ & $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$

$E \in F_\sigma$ και $F \in G_\delta$, $F_\sigma, G_\delta \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $E \subset A \subset F$

Τελος, $\forall n \in \mathbb{N}$: $F \setminus E \subset U_n \setminus K_n$

$\lambda(F \setminus E) \leq \lambda(U_n \setminus K_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda(F \setminus E) = 0$

Αν $A \in \mathcal{M}_\lambda^*$ τότε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu(A_n) < +\infty$, $A_n \in \mathcal{M}_\lambda^*$

(πχ $A_n = A \cap B(0, n)$)

Τότε κάθε $A_n \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))_\lambda$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))_\lambda$

$(\Leftarrow)$: $A = E \cup (A \setminus E)$ όπου $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{M}_\lambda^*$ και $A \setminus E \subset F \setminus E$: $\lambda(F \setminus E) = 0$

τότε $A \setminus E$ λ-μηδενικό και αφού λ πλήρες μέτρο στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_\lambda^*)$

έπεται $A \setminus F \in \mathcal{M}_\lambda^*$. Άρα, $A \in \mathcal{M}_\lambda^*$

Πρόταση
Το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ ώστε σε κάθε διάστημα να δίνει τον όγκο του. (δηλ. $\lambda(I) = V(I)$, $\forall$ I διάστημα $\subseteq \mathbb{R}^k$)

Απόδειξη
Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ + $\mu(I) = V(I)$, $\forall I$ διάστημα $\subseteq \mathbb{R}^k$
Θέτουμε $\Delta = \{I : I \text{ διάστημα } \subseteq \mathbb{R}^k\}$
Δ είναι κλειστή στις πεπερ. τομές, $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$
ισχύει $\mu(I) = V(I) = \lambda(I)$ $\forall$ I διάστημα $\subseteq \mathbb{R}^k$
$\mathbb{R}^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n]^k$ όπου $[-n,n]^k \in \Delta$, $([-n,n]^k)_{k\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία και επίσης
$\lambda([-n,n]^k) = (2n)^k = \mu([-n,n]^k) < +\infty$
Άρα από πρόταση του $2^{\text{ου}}$ κεφαλαίου $\Rightarrow \mu = \lambda$.

Ορισμοί - Συμβολισμοί:
Για κάθε $A, B \subset \mathbb{R}^k$:
$A+B := \{x+y : x\in A \wedge y \in B\}$
$A-B := \{x-y : x\in A \wedge y \in B\}$
Αν $B = \{x\}$ τότε συμβολίζουμε
$A+B = A+\{x\} =: A+x$ και
$A-B = A-\{x\} =: A-x$
Για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ ορίζουμε $T_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ συνάρτηση με τύπο $T_x(y) = x+y$ η μετάθεση κατά x
Η T_x 1-1 και επί
Η T_x συνεχής
Η $T_x^{-1} = T_{-x}$ συνεχής
$\Bigg\}\rightarrow$ T_x ομοιομορφισμός
Επίσης, $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) + x = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n + x)$ και
$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + x)$
Επίσης, $\forall A, B$ εν $\mathbb{R}^k$ ισχύει ότι:
$(A \setminus B) + x = (A+x) \setminus (B+x)$
Επιπλέον για $A \subset \mathbb{R}^k$: A ανοιχτό $\Leftrightarrow$ $A+x$ ανοιχτό

Παρατήρηση
Για ένα $A \subset \mathbb{R}^k$ ισχύει:
$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \Leftrightarrow A+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

Απόδειξη
Θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{F} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : A+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \}$
Η $\mathcal{F}$ εύκολα φαίνεται πως είναι σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^k$ που περιέχει τα ανοιχτά. Άρα, $\mathcal{F} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$
Συνεπώς, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

Πρόταση
i) Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue (είναι λ^*), είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις. Δηλ. $\lambda^*(A+x) = \lambda^*(A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}^k, x \in \mathbb{R}^k$
ii) Το μέτρο Lebesgue (είναι λ), είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις. Δηλαδή
a. $\forall x \in \mathbb{R}^k \; \forall A \in \mathbb{R}^k : A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \Rightarrow A+x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$
b. $\forall x \in \mathbb{R}^k, \forall A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} : \lambda(A+x) = \lambda(A)$
γ. $\forall x \in \mathbb{R}^k, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : \lambda(A+x) = \lambda(A)$

Απόδειξη
i) Παρατηρούμε ότι αν I διάστημα του $\mathbb{R}^k$ & $x \in \mathbb{R}^k$ τότε $V(I) = V(I+x) = V(I-x)$ ⊛

$\lambda^*(A+x) := \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} V(I_n) : I_n$ ανοιχτά φραγ. διαστήματα, $A+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \} =$

$= \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} V(I_n - x) : I_n$ ανοιχτά φραγ. διαστήματα, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n - x) \}$

$= \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} V(J_n) : J_n$ ανοιχτά φραγ. διαστήμ., $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \}$

⊛ : $\left.\begin{array}{l} I = \times_{i=1}^{k} (a_i, \beta_i), \quad I+x = \times_{i=1}^{k} (a_i + x_i, \beta_i + x_i) \\ x = (x_1, \dots, x_k) \end{array}\right\} V(I+x) = V(I)$

ii) a. Έστωσαν $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ & $x \in \mathbb{R}^k$
Τότε $\forall B \subset \mathbb{R}^k$ $\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap (A+x)) + \lambda^*(B \setminus (A+x))$
διότι, $\lambda^*(B) \overset{(i)}{=} \lambda^*(B-x) \overset{A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}}{=} \lambda^*((B-x) \cap A) + \lambda^*((B-x) \setminus A) \overset{(i)}{=}$
$\overset{(i)}{=} \lambda^*((B-x) \cap A + x) + \lambda^*((B-x) \setminus A + x) = \lambda^*(B \cap A+x) + \lambda^*(B \setminus (A+x))$

Άρα $A+x \in \mathcal{M}_\lambda^*$

Αντίστροφα, αν $A+x \in \mathcal{M}_\lambda^* \Rightarrow (A+x)-x \in \mathcal{M}_\lambda^* \Rightarrow A \in \mathcal{M}_\lambda^*$

β. Έπεται από το (i) και το (α)

γ. Έπεται από το (i) και ότι $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \Leftrightarrow A+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

<u>Θεώρημα</u> (Μοναδικότητα μέτρου Lebesgue ως προς το αναλλοίωτο μετα Θ)

Έστω μ ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ και $\mu(I+x)=\mu(I)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$, I διάστημα του $\mathbb{R}^k$ και $\forall K \subset \mathbb{R}^k$ συμπαγές : $\mu(K) < +\infty$. Τότε $\exists a \geq 0$ $\mu = a\lambda$

<u>Θεώρημα</u> (Steinhauss)

Αν $A \in \mathcal{M}_\lambda^*$ με $\lambda(A) > 0$ τότε $\exists \delta > 0$: $S(0,\delta) \subset A-A$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A) := \sup\{\lambda(K),\ K \subset A$ συμπαγές$\}$

Τότε $\exists K \subset A$ συμπαγές με $\lambda(K) > 0$

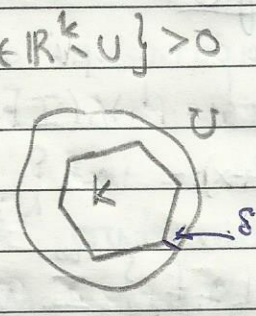
Τότε $\exists U \supset K$ ανοιχτό με $\lambda(U) < 2\lambda(K)$

Τα K, $\mathbb{R}^k \setminus U$ είναι ξένα

K συμπαγές και $\mathbb{R}^k \setminus U$ κλειστό

Άρα, $\rho(K, \mathbb{R}^k \setminus U) = \inf\{\|x-y\| : x \in K, y \in \mathbb{R}^k \setminus U\} > 0$

Θέτουμε $\delta := \rho(K, \mathbb{R}^k \setminus U)$



α) <u>Ισχυρισμός</u> : $S(0,\delta) + K \subset U$

Αν αυτό δεν ισχύει τότε $\exists x \in S(0,\delta)$ και $y \in K$ με $x+y \notin U \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^k \setminus U$

Άρα, αφού ξένα τότε $\delta \leq \|(x+y)-y\| = \|x\| < \delta$ άτοπο

Επομένως ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός.

Έστω τώρα $x \in S(0,\delta)$

Απο τον ισχυρισμό έπεται $x + K \subset U$.

β) <u>Ισχυρισμός</u> : $K \cap (x+K) \neq \emptyset$

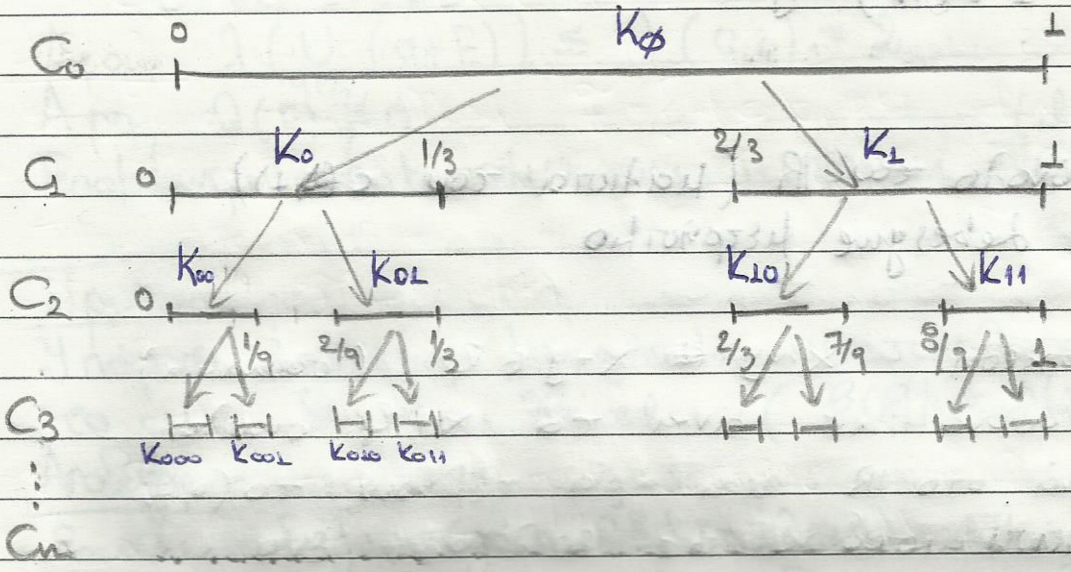
Αν $K \cap (x+K) = \emptyset \Rightarrow K \cup (x+K) \subset U \Rightarrow \lambda(K \cup (x+K)) \leq \lambda(U)$
$\Rightarrow \lambda(K) + \lambda(x+K) \leq \lambda(U) \Rightarrow \lambda(K) + \lambda(K) \leq \lambda(U) \Rightarrow 2\lambda(K) \leq \lambda(U)$

Επίσης άτοπο

Άρα, $\exists k_1, k_2$ εν K : $k_1 = x + k_2 \Rightarrow x = k_1 - k_2 \Rightarrow x \in K-K$

και αφού $K-K \subset A-A$ τότε $x \in A-A$

Το Σύνολο του Cantor



Επαγωγικά ορίζουμε $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου κάθε C_n είναι ξένη ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα $C_{n+1}\subset C_n$. Το σύνολο Cantor ορίζεται να είναι $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Άρα, $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ και μάλιστα συμπαγές. Είναι $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έτσι, όταν $n\to\infty$: $\lambda(C)=0$

Ορίζουμε K_s, όπου s διατρέχει όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες από 0, 1
$K_{\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}\sigma_n} \subset K_{\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}$

Ορίζουμε $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to C$ ως εξής
$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\ldots)$
Η $(K_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων με $\mathrm{diam}(K_{\sigma_1\ldots\sigma_n})\to 0$
Άρα, από τον κιβωτισμό του Cantor
$\exists!\, x : \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\sigma_1\ldots\sigma_n} = \{x\}$ $\quad (x = f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots))$
Η f είναι 1-1 και επί. Άρα, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\simeq C$
Άρα, $\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}(P(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.
Δηλαδή, το C έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.

Επιπλέον ασκήσεις από το 4ο κεφάλαιο: 4.1, 4.2, 4.3, 4.7, 4.16.

Είχαμε δείξει ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$

Ερώτημα:

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subsetneq \mathcal{M}_{\lambda^*} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$;

Θεώρημα (Vitali)

Υπάρχει υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (μάλιστα του $\subset (0,1)$) που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο

Απόδειξη

Ορίζουμε τη σχέση $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$ (ισοδυναμία)

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα $x+\mathbb{Q}$ σύνολα που είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ και άρα τέμνουν το $(0,1)$

Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα ακριβώς σημείο στο $(0,1)$ και "σχηματίζουμε" ένα σύνολο E (αξίωμα της επιλογής)

Ιδιότητες

α) $E \subset (0,1)$

β) Αν $q, r \in \mathbb{Q}$ με $q \neq r \Rightarrow (E+q) \cap (E+r) = \emptyset$

γ) $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q+E)$

Αποδ.

α) προφανές εξ ορισμού του E

β) Αν δεν ισχύει η (β) τότε $\exists x, y \in E : x+q = y+r \Rightarrow$
$\Rightarrow x-y = r-q \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow x \neq y$ και $x-y \in \mathbb{Q}$
όμως $x \sim y$ (άρα άτοπο)

γ) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in E : x \sim y \leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}+E$
$\Rightarrow x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q+E)$.

Θδο $E \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}$

Υποθέτουμε πως $E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$

Για κάθε A άπειρο $\subset \mathbb{Q}$ με $A = \{q_1, q_2, \dots\}$ $q_n \neq q_m$ για κάθε $n \neq m$, ισχύει:

$$\lambda\Big(\bigcup_{q \in A} (q+E)\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n+E)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(q_n+E) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E) = \begin{cases} 0, & \lambda(E)=0 \\ +\infty, & \lambda(E)>0 \end{cases}$$

Για $A = \mathbb{Q} \rightarrow \lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q+E)\Big) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Άρα, $\lambda(E) \neq 0$

Επομένως, αποκλείσαμε την περίπτωση $\lambda(E)=0$

Για $A=\mathbb{Q}\cap(0,1)$ τότε $\bigcup_{q\in A}(q+E)\subset(0,2)$

Άρα, $\lambda\left(\bigcup_{q\in A}(q+E)\right)\leq\lambda(0,2)=2$.

Άρα, $\lambda(E)\not>0$

Επομένως, αποκλείσαμε την περίπτωση $\lambda(E)>0$.

Πρόταση

Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι Borel. ($\mathcal{B}(\mathbb{R})\neq\mathcal{M}_{\lambda^*}$)

Απόδειξη

Έχουμε δείξει (στο 2º κεφάλαιο) ότι $Card(\mathcal{B}(\mathbb{R}))=c$ πληθάριθμος του συνεχούς. Για το σύνολο Cantor C έχουμε ότι $\lambda(C)=0$ και όπως το λ πλήρες μέτρο συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{P}(C)\subset\mathcal{M}_{\lambda^*}$. Άρα, ισχύει η σχέση:

$Card(\mathcal{M}_{\lambda^*})\geq Card(\mathcal{P}(C))>Card(C)=c$ συνεχές.

Δηλαδή $Card(\mathcal{M}_{\lambda^*})>Card(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Άρα, $\exists A\in\mathcal{M}_{\lambda^*}:\ A\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$